

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»

А. Кесенин В.Н. Деснянский
«15» *февраля* 2022 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Заключительный этап
11 класс**

Вариант 1

Задание 1.

На участке трамвайного пути длиной 1 км пешеход, проходящий этот участок за 10 минут, ежедневно подсчитывал число трамваев, его обгоняющих и встречающих. В течение года первых оказалось 300, вторых 700. Определить скорость трамвая.

Задание 2.

Решить неравенство:

$$\frac{x\sqrt{5} + 1}{1 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \leq 1.$$

Задание 3.

Решить уравнение:

$$\cos^2 2x + \cos^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$$

Задание 4.

Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x-5}{x+3} \right) - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} + 4x + 9 \right) \leq 2 \log_4 (x^2 + 5x + 6).$$

Задание 5.

Построить с полным обоснованием график:

$$y = 2^{-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}}.$$

Задание 6.

Решить в целых числах уравнение:

$$x^2 - y^2 - 4y = 9.$$

Задание 7.

В банк кладется 1000 рублей на 10 лет. В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% один раз в год, или если он начисляет $\frac{5}{12}$ % один раз в месяц.

Ответ должен быть обоснован.

Задание 8.

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где $ABCD$ – нижнее основание. Найти площадь сечения этого куба плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер $B_1 C_1$ и $D_1 C_1$, если ребро куба равно 1.

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»

В.Н. Деснянский
«15» февраля 2022 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Заключительный этап
11 класс**

Вариант 2

Задание 1.

На участке трамвайного пути длиной 1 км пешеход, проходящий этот участок за 12 минут, ежедневно подсчитывал число трамваев, его обгоняющих и встречающих. В течение года первых оказалось 225, вторых 600. Определить скорость трамвая.

Задание 2.

Решить неравенство:

$$\frac{3x + 3}{3 - \sqrt{x^2 - 2x + 10}} \leq 1.$$

Задание 3.

Решить уравнение:

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x.$$

Задание 4.

Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{x-1}{x-9} \right) \leq \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51 \right) + 2 \log_{49} (x^2 - 17x + 72).$$

Задание 5.

Построить с полным обоснованием график:

$$y = 2^{-\frac{1}{|x| - \frac{1}{|x|}}}.$$

Задание 6.

Решить в целых числах уравнение:

$$4x^2 = y^2 + 2y + 4.$$

Задание 7.

В банк кладется 1000 рублей на 5 лет. В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 3% один раз в год, или если он начисляет $\frac{1}{4}\%$ один раз в месяц.

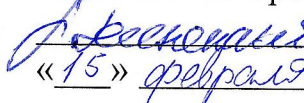
Ответ должен быть обоснован.

Задание 8.

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, с ребром равным 1. На продолжении ребра $D_1 D$ за точку D взята точка K такая, что $DK = \frac{1}{2}$. Через точку K и середины ребер AA_1 и CC_1 проведена плоскость. Найти площадь получившегося сечения.

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»

 В.Н. Деснянский
«15» февраля 2022 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Заключительный этап
11 класс**

Вариант 3

Задание 1.

На участке трамвайного пути длиной 1 км пешеход, проходящий этот участок в течение 15 минут, ежедневно подсчитывал число трамваев, его обгоняющих и встречающих. В течение года первых оказалось 400, вторых 800. Определить скорость трамвая.

Задание 2.

Решить неравенство:

$$\frac{x\sqrt{2} + 1}{1 - \sqrt{x^2 - 4x + 5}} \leq 1.$$

Задание 3.

Решить уравнение:

$$\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x.$$

Задание 4.

Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{x+3}{x-5} \right) + 2 \log_{25} \left(\frac{x^2}{2} - 6x + 19 \right) \leq \log_5 (x^2 - 9x + 20).$$

Задание 5.

Построить с полным обоснованием график:

$$y = 4^{\frac{1}{x^4+x}}.$$

Задание 6.

Решить в целых числах уравнение:

$$x^2 = y^2 + 2y + 2.$$

Задание 7.

В банк кладется 1000 рублей на 8 лет. В каком случае вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 4% один раз в год, или если он начисляет $\frac{1}{3}\%$ один раз в месяц.

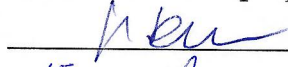
Ответ должен быть обоснован.

Задание 8.

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 – боковые ребра. Через вершину A_1 середину ребра BC и центр грани $DCC_1 D_1$ проведена плоскость. Найти площадь сечения куба этой плоскостью, если сторона куба равна 1.

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»

 В.Н. Деснянский
«15» февраль 2022 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
11 класс**

Вариант 1

Задание 1.

Так как пешеход проходит 1 км за 10 минут, то его скорость будет 6 км/час. Встречных трамваев больше, чем обгоняющих, то это потому, что по отношению к пешеходу скорость первых больше, чем вторых. Если считать, что пешеход стоит на месте, то скорость встречных трамваев складывается из собственной скорости трамвая V + скорость пешехода. Значит, относительная скорость встречных трамваев равна $V + 6$, относительная скорость обгоняющих $V - 6$. Понятно, что число трамваев проходящих за определенное время через данную точку, будет пропорционально их скорости, откуда имеем:

$$\frac{V+6}{V-6} = \frac{700}{300} \rightarrow 3V + 18 = 7V - 42, \text{ т.е. } V = 15.$$

Ответ: 15 км/час.

Задание 2.

ОДЗ $x \neq 1$. Так как в области ОДЗ знаменатель отрицателен, то неравенство сводится к неравенству:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq -\sqrt{5}x.$$

При $x \geq 0$ это неравенство верно, при $x < 0$ получим:

$$x^2 - 2x + 2 \geq 5x^2.$$

Решение этого неравенства есть промежуток $-1 \leq x \leq 0$.

Ответ: $-1 \leq x < 1, x > 1$.

Задание 3.

ОДЗ $x \neq \frac{\pi k}{3}$. Имеем:

$$\cos^2 x = \sin^2 2x + \frac{\cos(2x + x)}{\sin 3x};$$

$$\cos^2 x = 4\sin^2 x \cos^2 x + \frac{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}{\sin 3x};$$

$$\cos^2 x(1 - 4\sin^2 x) = \frac{\cos x(\cos 2x - 2\sin^2 x)}{\sin 3x};$$

$$\cos^2 x(1 - 4\sin^2 x) = \frac{\cos x}{\sin 3x}(1 - 4\sin^2 x);$$

Значит $\cos x = 0$ или $1 - 4\sin^2 x = 0$.

Отсюда находим $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$.

Далее имеем:

$$\cos x \sin 3x = 1.$$

Это равенство возможно в двух случаях:

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что обе системы решений не имеют.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; k, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Задание 4.

Переходя к основанию 2 в логарифмах, получим неравенство:

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{x^2}{2} + 4x + 9 \right) &\leq \log_2 \left[\left(\frac{x-5}{x+3} \right) \cdot (x+3) \cdot (x+2) \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{x^2}{2} + 4x + 9 \leq x^2 - 3x - 10. \end{aligned}$$

Значит $x^2 - 14x - 38 \geq 0$. Решая это неравенство, получим:

$$x \leq 7 - \sqrt{87} \text{ и } x \geq 7 + \sqrt{87}.$$

Находим ОДЗ: $\frac{x-5}{x+3} > 0; x^2 + 5x + 6 > 0 \rightarrow x < -3; x > 5$.

Поэтому ответ: $x < -3$; $x \geq 7 + \sqrt{87}$.

Задание 5.

Построение графика разобьем на три этапа. Вначале строим график $y_1 = x + \frac{1}{x}$, затем график $y_2 = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$ и наконец график $y = (2^{y_2})^{-1}$.

Функция $x + \frac{1}{x}$ является функцией нечетной, поэтому достаточно рассмотреть этот график при $x > 0$. Так как $x + \frac{1}{x} \geq 2$, то $\min y_1 = 2$ при $x = 1$. Функция $y = x + \frac{1}{x}$ имеет две асимптоты: вертикальная – ось y и наклонная $y = x$. Исходя из этого, график имеет вид (см. рис. 1):

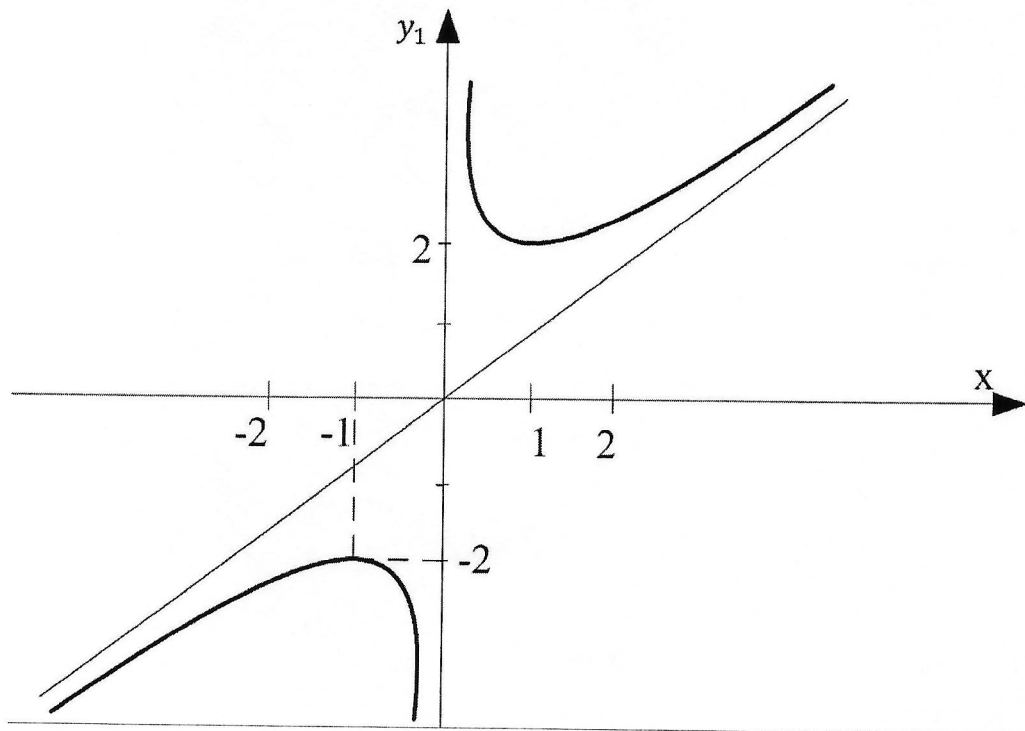


Рисунок 1

Далее строим график $y_2 = \frac{1}{y_1}$. Получим (см. рис. 2), точка $x = 0$ выколота:

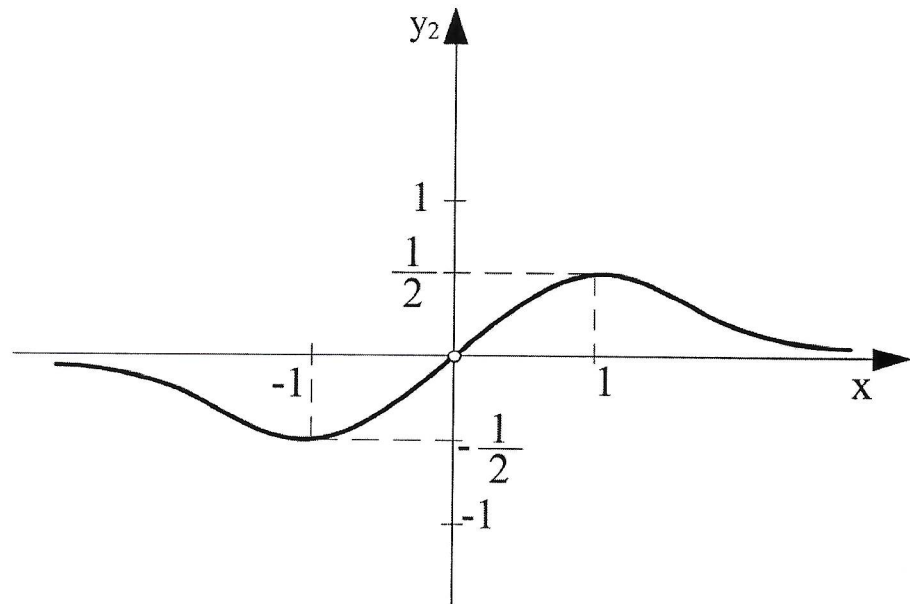


Рисунок 2

И наконец, строим график $y = (2^{y^2})^{-1}$ (см. рис. 3). По свойству показательной функции получится график с выколотой точкой с координатами $(0; 1)$.

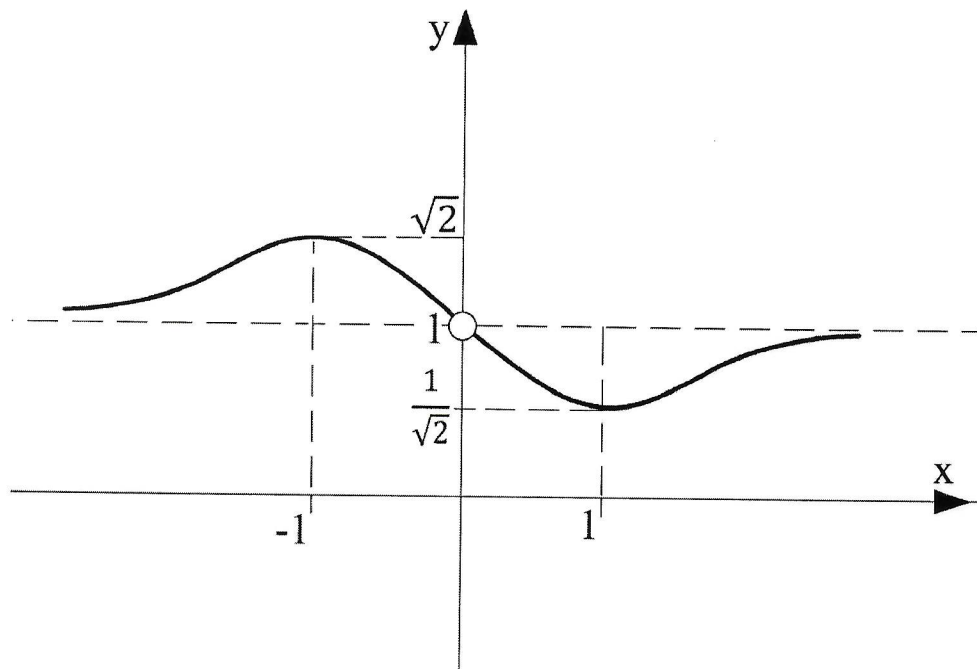


Рисунок 3

Задание 6.


Имеем:

$$x^2 - (y + 2)^2 = 5, \quad (x - y - 2) \cdot (x + y + 2) = 5$$

Так как x, y – целые числа, то равенство возможно в 4 случаях:

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»

 В.Н. Деснянский
«15» февраля 2022 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 2

Задание 1.

Скорость пешехода равна 5 км/час. Встречных трамваев больше, чем обгоняющих, то это потому, что по отношению к пешеходу скорость первых больше, чем вторых. Если считать, что пешеход стоит на месте, то скорость встречных трамваев складывается из собственной скорости трамвая V + скорость пешехода. Значит, относительная скорость встречных трамваев равна $V + 5$, относительная скорость обгоняющих $V - 5$. Понятно, что число трамваев проходящих за определенное время через данную точку, будет пропорционально их скорости, откуда имеем равенство:

$$\frac{V+5}{V-5} = \frac{600}{225} \rightarrow V = 11 \text{ км/час.}$$

Ответ: 11 км/час.

Задание 2.

$\frac{3x+3}{3-\sqrt{(x-1)^2+9}} \leq 1 \rightarrow \text{ОДЗ } x \neq 1 \text{ и } 3 - \sqrt{(x-1)^2+9} \leq 0$. Поэтому имеем:

$$\frac{3x+3-3+\sqrt{(x-1)^2+9}}{3-\sqrt{(x-1)^2+9}} \leq 0.$$

Так как знаменатель не положителен, то получим:

$$\sqrt{(x-1)^2 + 9} + 3x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 9} \geq -3x.$$

Если $x \geq 0$, то неравенство верно.

Если же $x < 0$, то $x^2 - 2x + 10 \geq 9x^2$, $4x^2 + x - 5 \leq 0$, $-\frac{5}{4} \leq x \leq 1$.

А тогда ответ: $-\frac{5}{4} \leq x, x \neq 1$.

Задание 3.

ОДЗ $\sin 3x \neq 0, x \neq \frac{\pi k}{3}$.

$$\sin^2 2x = \cos^2 x + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$4\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos(2x + x)}{\sin 3x}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x (4\sin^2 x - 1) &= \frac{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}{\sin 3x} = \frac{\cos^2 x (\cos 2x - 2\sin^2 x)}{\sin 3x} = \\ &= \frac{\cos x (1 - 4\sin^2 x)}{\sin 3x}. \end{aligned}$$

Поэтому $\begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 4\sin^2 x = 0 \end{cases}$ или $\sin 3x \cos x = -1$.

Значит, решение будет: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

Эти системы не имеют решений.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k, n \in Z \right\}$.

Задание 4.

Переходя к основанию 7 в логарифмах, получим:

$$-\log_7 \left(\frac{x-1}{x-9} \right) \leq -\log_7 \left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51 \right) + \log_7 (x^2 - 17x + 72);$$

$$\log_7 (x^2 - 17x + 72) \geq \log_7 \left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51 \right) - \log_7 \left(\frac{x-1}{x-9} \right);$$

$$x^2 - 17x + 72 \geq \left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51 \right) \cdot \left(\frac{x-9}{x-1} \right);$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51\right) \cdot \left(\frac{x-9}{x-1}\right) - (x-8) \cdot (x-9) \leq 0$$

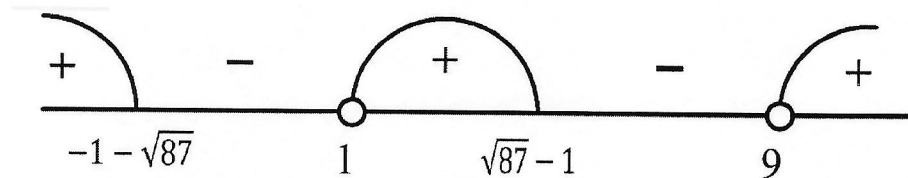
$$(x-9) \cdot \left(\frac{\frac{x^2}{2} - 10x + 51}{x-1} - (x-8)\right) \leq 0$$

$$\frac{x-9}{x-1} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 10x + 51 - x^2 + 8x + x - 8\right) \leq 0$$

$$\frac{x-9}{x-1} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} - x + 43\right) \leq 0$$

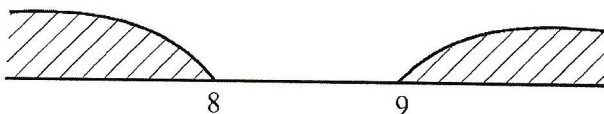
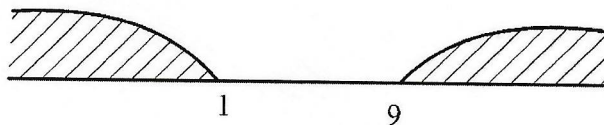
$$\frac{(x^2 + 2x - 86) \cdot (x-9)}{(x-1)} \geq 0$$

Решаем методом интервалов:



Находим ОДЗ: так как $\frac{x^2}{2} - 10x + 51 > 0$ для любого x , то:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x-9} > 0 \\ x^2 - 17x + 72 > 0 \\ (x-1)(x-9) > 0 \\ (x-8)(x-9) > 0 \end{cases}$$



Отсюда ОДЗ: $x > 9; x < 1$.

Следовательно, ответ: $x \leq -1 - \sqrt{87}; x > 9$.

Задание 5.

Так как $|-x| = |x|$, то функция $y = 2 \frac{1}{\frac{1}{|x|} - |x|}$ четная. Значит достаточно построить график для $x > 0$. Строим в начале график $y_1 = \frac{1}{x} - x$ для $x > 0$.

Этот график имеет две асимптоты: вертикальная – ось OY и наклонная $y = -x$ при $x = 1, y_1 = 0$. Находим производную $y_1' = -\frac{1}{x^2} - 1$. Видим, что y_1' везде отрицателен, значит, функция монотонно убывает. Поэтому график имеет вид (рис. 1):

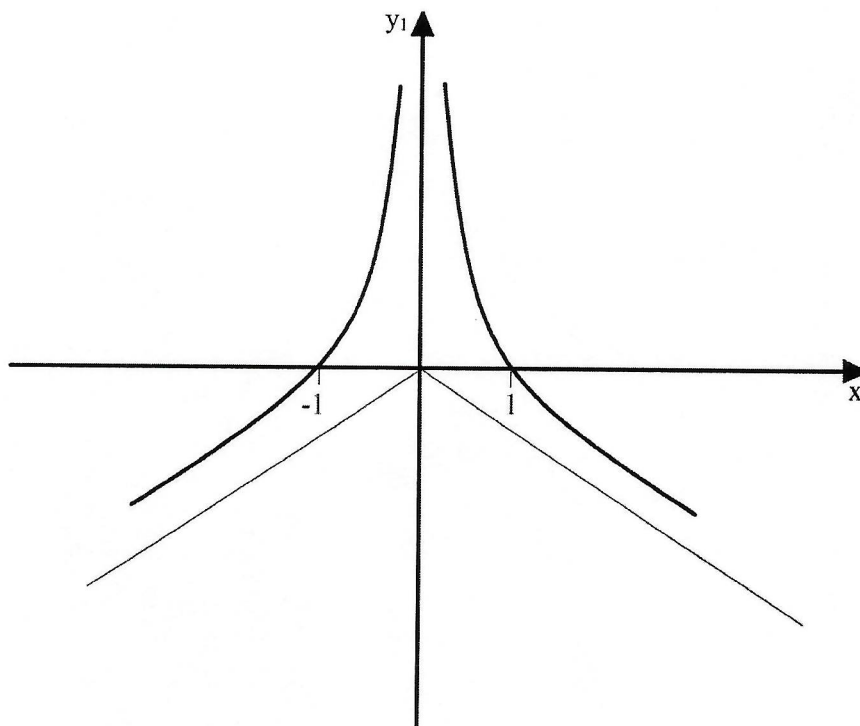


Рисунок 1

Далее строим график $y_2 = \frac{1}{y_1}$. Так как при $x \rightarrow 0, y_1 \rightarrow \infty$, то $y_2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1, y_1 \rightarrow 0$, следовательно, $x = 1$ – точка разрыва 2 рода (бесконечный разрыв). Вследствие этого получим график y_2 (рис. 2):

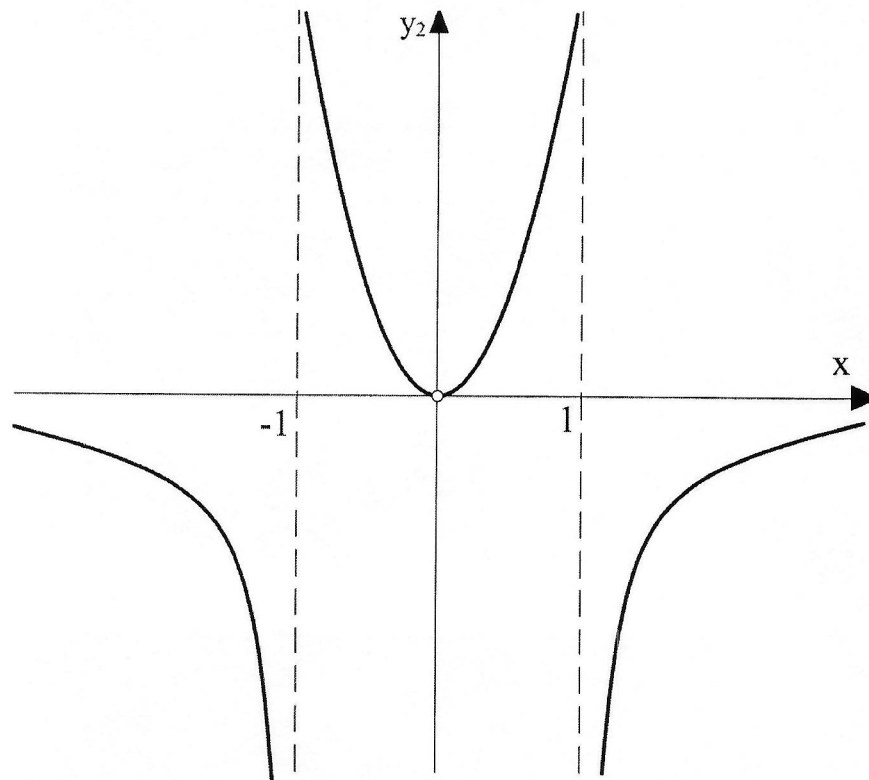


Рисунок 2

Исходя из этого графика, наконец, получим график $y = 2^{y_2}$ (рис. 3):

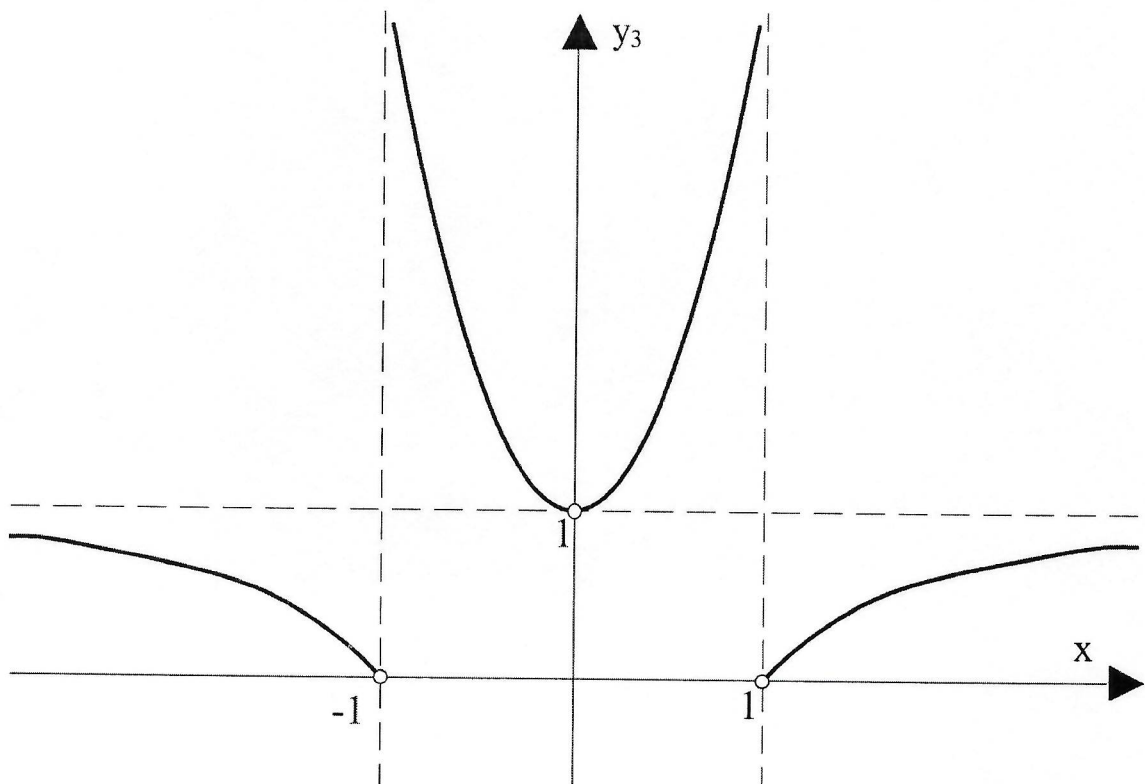


Рисунок 3

В точке $(0, 1)$ имеем разрыв I^{Γ_0} рода. При $x \rightarrow \pm\infty y_3 \rightarrow 1$.

Задание 6.

$$4x^2 = y^2 + 2y + 1 + 3;$$

$$(2x)^2 - (y + 1)^2 = 3;$$

$$(2x - y - 1) \cdot (2x + y + 1) = 3.$$

Так как x, y – целые числа, то получим:

$$1) \begin{cases} 2x - y - 1 = 1 \\ 2x + y + 1 = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - y - 1 = 3 \\ 2x + y + 1 = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x - y - 1 = -3 \\ 2x + y + 1 = -1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - y - 1 = -1 \\ 2x + y + 1 = -3 \end{cases}$$

Из первой системы: $x = 1, y = 0$

Из второй системы: $x = 1, y = -2$

Из третьей системы: $x = -1, y = 0$

Из четвертой системы: $x = -1, y = -2$

Ответ: $\{(1,0), (1, -2), (-1,0), (-1, -2)\}$.

Задание 7.

Если проценты начисляются раз в год, то по формуле сложных процентов за 5 лет вкладчик получит сумму равную $(1 + 0,03)^5 \cdot 1000$. Точно так же, если проценты начисляются раз в месяц, то через 5 лет (т.е. 60 месяцев) вкладчик получит сумму: $1000 \cdot (1 + \frac{3}{12 \cdot 100})^{60}$. Покажем, что это число больше первого. Для этого достаточно показать, что:

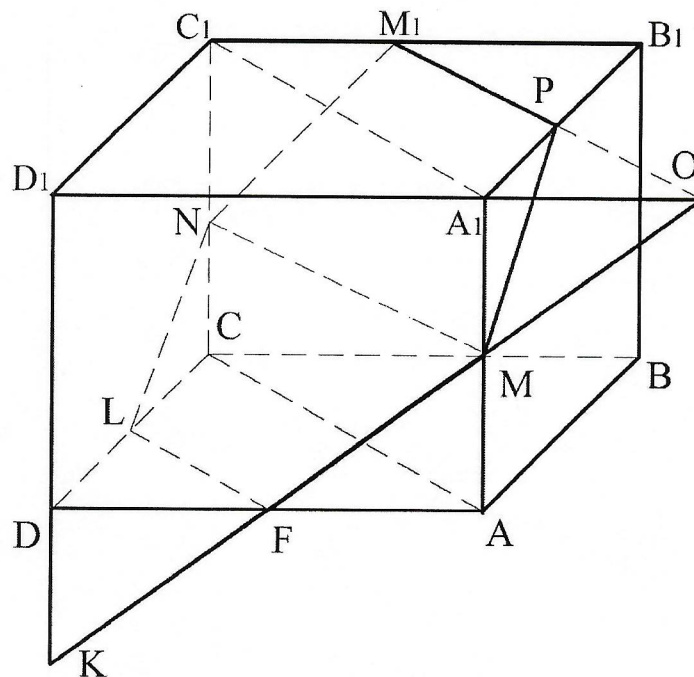
$$1 + \frac{3}{100} < (1 + \frac{3}{12 \cdot 100})^{12}.$$

По формуле бинома Ньютона второе число справа равно:

$$1 + \frac{3}{12 \cdot 100} \cdot 12 + \dots = 1 + \frac{3}{100} + \dots, \text{ что очевидно больше } 1 + \frac{3}{100}.$$

Ответ: во втором случае больше.

Задание 8.

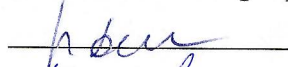


Пусть $ABCA_1B_1C_1D_1$ – данный куб со стороной 1. Соединим точку K с серединой стороны A_1A в точке M . Тогда $DF = FA = \frac{1}{2}$, пусть N – середина CC_1 . Продолжим FM до пересечения с D_1A_1 в точке O . Так как плоскость сечения проходит через $NM \parallel CA$ и $NM \parallel A_1C_1$, то плоскость сечения пересекает основание $DCBA$ по прямой $\parallel CA$. Значит FL , где L – середина DC будет лежать в плоскости сечения. Далее из точки N проведем прямую параллельную FM , которая очевидно пересекает C_1B_1 в некоторой точке M_1 . Отрезок M_1O лежит в плоскости верхнего основания. Поэтому M_1O пересекает A_1B_1 в середине A_1B_1 в некоторой точке P , которая делит A_1B_1 пополам. Соединяя точку P с точкой M получим искомое сечение куба. Очевидно, что данное сечение есть правильный шестиугольник со стороной равной $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому площадь сечения будет равна $6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»

 В.Н. Деснянский
«15» февраля 2022 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2021-2022 УЧ. ГОД
Краткие решения к задачам очного тура
11 класс

Вариант 3

Задание 1.

Скорость пешехода равна 4 км/час. Встречных трамваев больше, чем обгоняющих, то это потому, что по отношению к пешеходу скорость первых больше, чем вторых. Если считать, что пешеход стоит на месте, то скорость встречных трамваев складывается из собственной скорости трамвая V + скорость пешехода. Значит, относительная скорость встречных трамваев равна $V + 4$, относительная скорость обгоняющих $V - 4$. Понятно, что число трамваев проходящих за определенное время через данную точку, будет пропорционально их скорости, откуда имеем:

$$\frac{V+4}{V-4} = \frac{800}{400} \rightarrow V = 12 \text{ км/час.}$$

Ответ: 12 км/час.

Задание 2.

Под корнем стоит выражение $(x - 2)^2 + 1 \geq 1$ для любого x . Находим, что ОДЗ $x \neq 2$

Так как знаменатель левой части неравенства всегда отрицателен, то получим, что $x\sqrt{2} + 1 - 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 0$.

Отсюда $\sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq -\sqrt{2}x$.

Для всех $x \geq 0$ неравенство верно. При $x \leq 0$ получим $x^2 - 4x + 5 \geq 2x^2$, $x^2 + 4x - 5 \leq 0$, $(x + 5) \cdot (x - 1) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 0$.

Тогда ответ: $x \geq -5, x \neq 2$.

Задание 3.

Обозначим $2x = t$, тогда $\cos^2 t + \cos^2 2t = 1 + \operatorname{ctg} 3t$.

ОДЗ $\sin 3t \neq 0, 3t \neq \pi k$.

$$\begin{aligned}\cos^2 t &= \sin^2 2t + \frac{\cos(2t + t)}{\sin 3t}; \\ \cos^2 t &= 4\cos^2 t \sin^2 t + \frac{\cos 2t \cos t - \sin 2t \sin t}{\sin 3t}; \\ \cos^2 t \cdot (1 - 4\sin^2 t) &= \cos t \cdot (1 - 4\sin^2 t).\end{aligned}$$

Отсюда: $\cos t = 0$; $1 - 4\sin^2 t = 0$.

Поэтому $\sin t = \pm \frac{1}{2}$, $t = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. Далее имеем $\cos t \sin 3t = 1$.

Это возможно если:

$$\begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin 3t = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos t = -1 \\ \sin 3t = -1 \end{cases}$$

Обе системы решений не имеют.

Возвращаясь к старой переменной x , получим ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$.

Задание 4.

Переходя в логарифмах к основанию 5, получим:

$$-\log_5 \left(\frac{x+3}{x-5} \right) + \log_5 \left(\frac{x^2}{2} - 6x + 19 \right) \leq \log_5 (x^2 - 9x + 20);$$

$$\text{Значит } \frac{x^2}{2} - 6x + 19 \leq (x^2 - 9x + 20) \cdot \left(\frac{x+3}{x-5} \right) = (x-4) \cdot (x+3).$$

Отсюда имеем неравенство:

$$\frac{x^2}{2} - 6x + 19 \leq x^2 - x - 12,$$

т.е. $x^2 + 10x - 62 \geq 0$, $x \leq -5 - \sqrt{87}$, $x \geq -5 + \sqrt{87}$.

Находим ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-5} > 0 \\ (x-4) \cdot (x-5) > 0 \end{cases} \rightarrow x < -3, x > 5.$$

С учетом ОДЗ ответ: $x < -5 - \sqrt{87}, x > 5$.

Задание 5.

$$y = 4^{\frac{1}{\frac{4}{x} + x}}$$

Вначале строим график $y_1 = \frac{4}{x} + x$

Очевидно, что функция y_1 будет нечетной, значит график симметричен относительно начала координат. Так как $\frac{4}{x} + x \geq 4$, то при $x = 2 \min y_1 = 4$. Функция y_1 имеет две асимптоты: вертикальная – ось OY и наклонная $y = x$. Поэтому график имеет следующий вид (рис. 1):

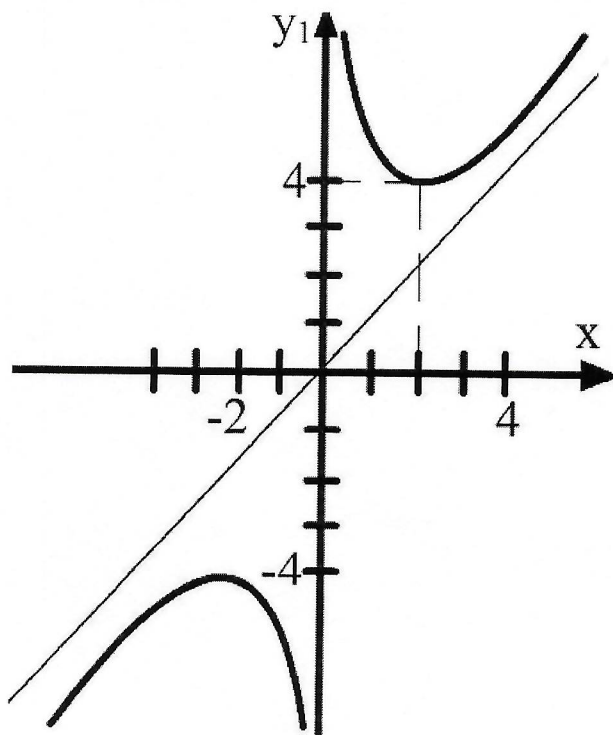


Рисунок 1

Далее строим график $y_2 = \frac{1}{y_1}$. В нуле этот график имеет точку разрыва (рис. 2):

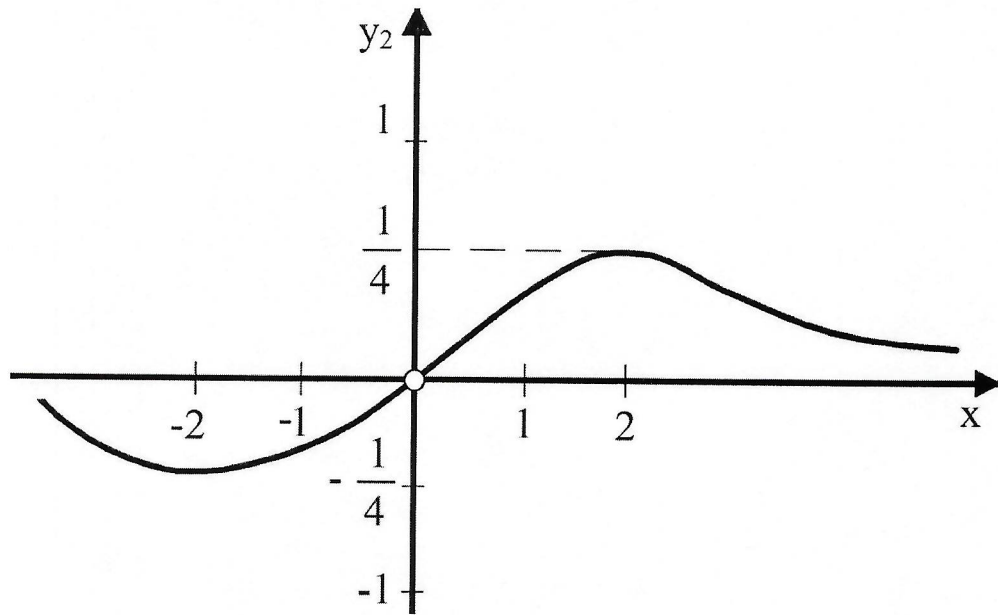


Рисунок 2

И наконец, строим график показательной функции $y = 4^{y_2}$ (рис. 3). Так как 4^{y_2} (при $y_2 \rightarrow 0$) стремится к 1, то имеем горизонтальную асимптоту $y = 1$. Из свойств показательной функции следует, что в точке $x = 2$ имеет максимум равный $\sqrt{2}$, в точке $x = -2$ имеем минимум, равный $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

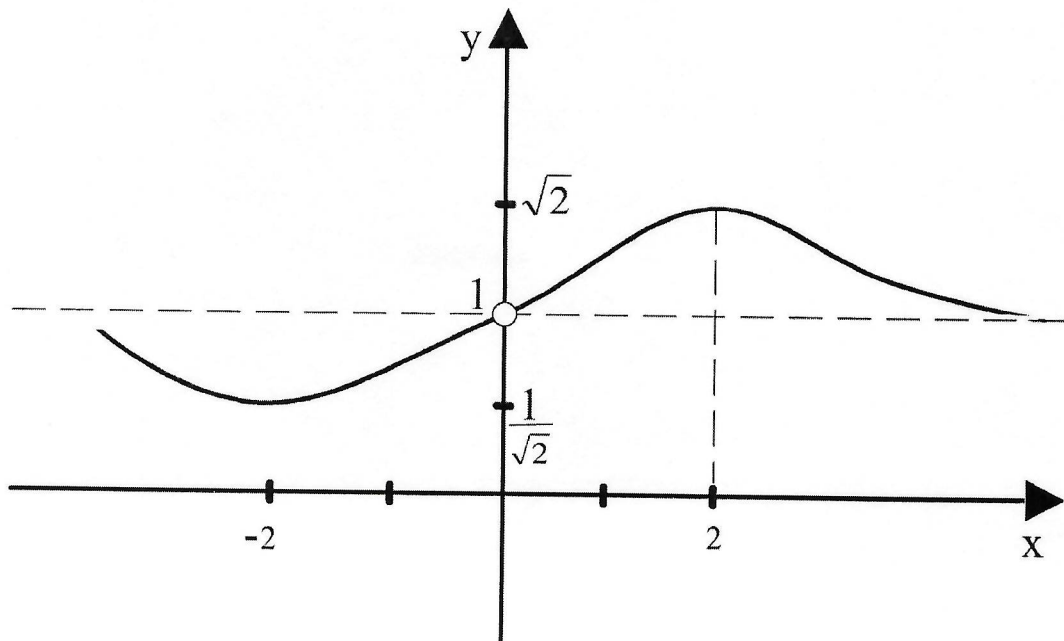


Рисунок 3

Исходя из этого, график $y = 4^{\frac{1}{x+\frac{4}{x}}}$ имеет вид (рис.3):

Задание 6.

$$x^2 = (y + 1)^2 + 1, \quad x^2 - (y + 1)^2 = 1, \quad (x - y - 1) \cdot (x + y + 1) = 1$$

Так как x, y – целые числа, то равенство возможно в двух случаях:

$$1) \begin{cases} x - y - 1 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y - 1 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases}$$

Из первой системы находим, что $x = 1, y = -1$.

Из второй $x = -1, y = -1$.

Ответ: $(1, -1), (-1; -1)$.

Задание 7.

Если проценты начисляются раз в год, то по формуле сложных процентов за 8 лет вкладчик получит сумму равную $(1 + 0,04)^8 \cdot 1000$. Точно так же, если проценты начисляются раз в месяц, то через 8 лет (т.е. 96 месяцев) вкладчик получит сумму: $1000 \cdot (1 + \frac{4}{12 \cdot 100})^{96}$. Покажем, что это число больше первого. Для этого достаточно показать, что:

$$1 + 0,04 < (1 + \frac{4}{12 \cdot 100})^{12}.$$

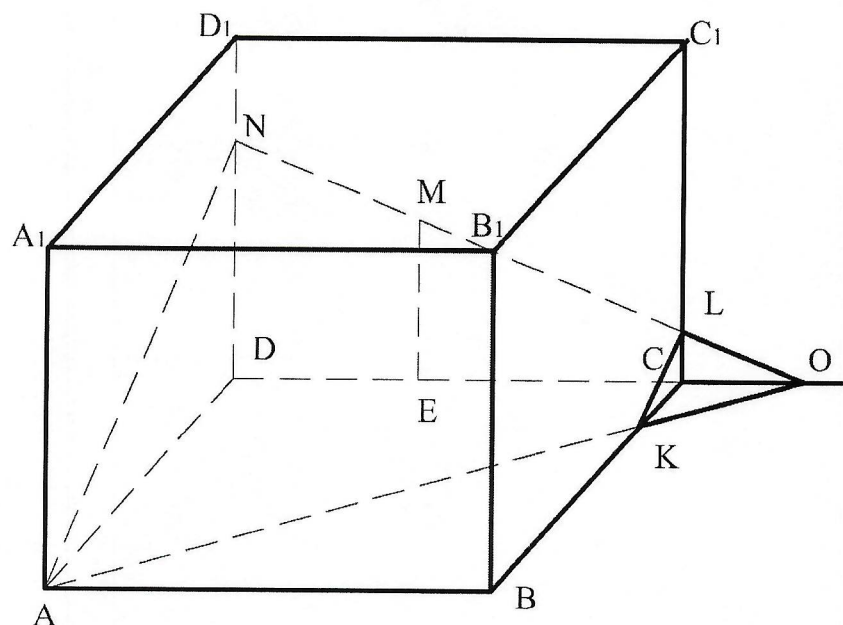
По формуле бинома Ньютона второе число справа равно:

$$1 + \frac{4}{12 \cdot 100} \cdot 12 + \dots = 1 + 0,04 + \dots, \text{ что очевидно больше } 1 + 0,04.$$

Ответ: во втором случае больше.

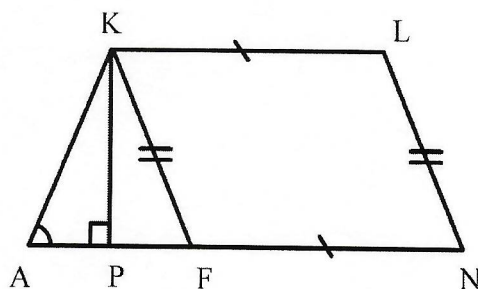
Задание 8.

Пусть K – середина ребра BC , M – центр грани DCD_1C_1 . Так как точки A и K лежат в плоскости нижней грани, то прямая AK пересечет продолжение ребра DC в некоторой точке O . Треугольники ABK и KCO равны, поэтому $CO = AB = DC$ и $DO = 2DC$. Так как точки M и O лежат в плоскости грани DCD_1C_1 , то прямая MO пересекает ребра CC_1 и D_1D в некоторых точках L и N . Тем самым, сечение это четырехугольник $AKLN$, который является трапецией т.к. $AN \parallel KL$. Так как сторона куба равна 1, то из подобия треугольников легко находится, что $LC = D_1N = \frac{1}{3}, DN = \frac{2}{3}$.



По теореме Пифагора находим стороны трапеции $AN = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $AK = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $KL = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$, $NL = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

В трапеции $AKNL$ проведем прямую $KF \parallel LN$ и высоту трапеции KP . Так как $KL = \frac{1}{2}AN$, то $AF = FN = LK$.



По теореме косинусов имеем $KF^2 = (AK)^2 + (AF)^2 - 2AK \cdot AF \cos \hat{A}$, то $\cos A = \frac{3}{\sqrt{65}} \rightarrow \sin A = \sqrt{\frac{56}{65}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}$. А тогда $KP = \sqrt{\frac{14}{13}} \rightarrow \text{Страп} = \frac{1}{2}KP \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$